6 共に質量 m の二つの質点 1,2 の座標をそれぞれ $\boldsymbol{X_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{X_2} = (x_2, y_2, z_3)$ とする。この二つの質点は自然長が 0 でばね定数 k のばねでつながっており、質点 1 は質点 2 から $-k(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)$ の力を受ける。以下で、$\dot{}$ は時間微分を表す。

問 1. 重心座標 $\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X_2})$、相対座標 $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X_2})$、およびそれらの時間微分を用いてこの系の運動エネルギー T、ばねの弾性エネルギー V、およびこの系のラグランジアン $L = T - V$ を表せ。

問 2. $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{r}$ の運動方程式を求めよ。

問 3. この系の重心の周りの角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ を $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{r}$、およびそれらの時間微分と m によって表し、それが保存することを示せ。

問 4. 運動方程式を解き $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{r}$ の一般解を求めよ。

問 5. $t = 0$ で $(x_1, y_1, z_1) = (0, -a, 0)$, $(x_2, y_2, z_2) = (0, a, 0)$, $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1) = (b, 0, c)$, $(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2) = (-b, 0, c)$ の場合の時刻 t での $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{r}$ を求めよ。さらに時刻 t での $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ を求め、$\boldsymbol{R}$ を原点とする $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ の軌跡を表すグラフを記せ。適切な幾つかの時刻での $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ の位置がわかるように記すこと。

問 6. 問 5 の場合のこの系の重心の周りの角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ を求めよ。

7

真空の誘電率をε_0、真空の透磁率μ_0として以下の問いに答えよ。

問1. 無限に広いyz平面$(x=0)$に一様に電荷（面電荷密度σ）が分布している。

(1) この面電荷がつくる電場を求めよ。

(2) 静電ポテンシャルの大きさを求めよ。ただし、$x=0$を基準点とする。

問2. 無限に広いyz平面$(x=0)$上の導体に、y軸の正方向に一様な電流（面電流密度i）が流れている。この面電流がつくる磁場の向きと磁束密度の大きさを求めよ。ただし、面電流密度は単位長さあたりの電流を表す。

問3. 半径Rの円形の平行板コンデンサー（極板間隔d）に電荷Qを充電した後、極板間の外の空間に導線をつないで放電させると導線に電流$I(t)$が流れた。

(1) 放電中に極板の間の空間に生じる磁場の大きさを求めよ。

(2) 極板上の電荷を$Q(t)$として、極板間のポインティング・ベクトルの向きと大きさを求めよ。

8

質量 m の粒子がばね定数 $k = m\omega^2$ のばねでつながれている一次元量子調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

で与えられる。ただし $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ である。基底状態の波動関数は $\varphi(x) = N\exp(-ax^2)$ と表される。基底状態のエネルギーを E_0 とする。以下の問に答えよ。必要ならば、微分および積分の公式

$$\frac{d}{dx}\exp(-sx^2) = -2sx\exp(-sx^2), \quad \frac{d^2}{dx^2}\exp(-sx^2) = (4s^2x^2 - 2s)\exp(-sx^2),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\exp(-sx^2) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\exp(-sx^2) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\exp(-sx^2) = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

を用いても良い。

I.　以下の手順で、基底状態の波動関数 $\varphi(x)$ を求めよ。

1) $\hat{\mathcal{H}}\varphi(x)$ を計算せよ。

2) $\hat{\mathcal{H}}\varphi(x) = E_0\varphi(x)$（ただし E_0 は定数）を満たすように、定数 a を定めよ。

3) このとき E_0 はどのような値を取るか。

4) 規格化定数 N を定めよ。

II. 波動関数 $\varphi(x)$ を用いて、以下の量を計算せよ。

5) 期待値 $\langle x\rangle$ および $\langle x^2\rangle$ を求めよ。

6) 期待値 $\langle\hat{p}\rangle$ および $\langle\hat{p}^2\rangle$ を求めよ。

7) $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ および $\Delta p = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2}$ としたときに、$\Delta x \cdot \Delta p$ を求めよ。

III. 古典力学的に運動する一次元調和振動子の最低エネルギー状態は $E = 0$ というエネルギー値を取る。

8) 古典系との比較を含めて、量子系の基底状態について説明せよ。

9

体積 V の箱の中に n 個の同種の気体分子が存在し、温度 T の熱浴に接している。
気体分子間には排除体積相互作用が働き、重なり合うことは出来ないが、それ以外の相互作用はないものとする。この気体分子の系を、以下のように格子モデルにより解析しよう。
図 9–1 のように、体積 V の箱を体積が v_0 の単位胞（= 微小な立方体）で格子状に分割する。単位胞の数は $M = V/v_0$ である。単位胞の大きさは十分に小さく、その中に存在する気体分子数は 0 個か 1 個とする。ボルツマン定数を k_B とし、以下の問いに答えよ。

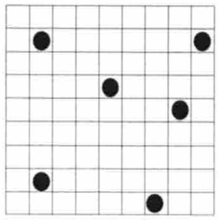


図9 - 1

問 1. 気体分子の分布についての場合の数 $W(M, n)$ を求めよ。

問 2. ボルツマンの公式を用いて、この系のエントロピー S を求めよ。ただし、$M, n \gg 1$ として、$N \gg 1$ に対して成り立つスターリングの公式 $\ln N! \simeq N \ln N - N$ を用いよ。

問 3. この系のヘルムホルツ自由エネルギーは $F = -TS$ となる。単位胞あたりのヘルムホルツ自由エネルギーを f を気体分子の濃度 $\phi = n/M$ の関数として求めよ。

問 4. 系の圧力が次の式で与えられることを示せ。（注：系の体積は $V = Mv_0$ であるが、このうち v_0 は一定であることに注意せよ。）

$$p = \frac{1}{v_0}\left[\phi\frac{\partial f}{\partial \phi} - f\right]$$

問 5. 問 4 の関係式を用いて、この系の圧力 p を求めよ。

以下、気体分子が希薄 $(n/M \ll 1)$ の場合を考える。

問 6. 問 5 で求めた圧力 p について、ϕ の二次まで展開せよ。

問 7. 問 6 で求めた結果において、ϕ の一次の項の寄与のみをとりいれたものは理想気体の圧力を与える状態方程式となる。ϕ の二次の項による補正は、どのような効果を表したものであると考えられるか。

10

1. 金属における電流の担い手は負電荷の電子であり、電荷は$-e$[C] ($e > 0, e$は電気素量) である。断面積が一定の金属線の中の電子が、加えられた電場E [V/m]によってEの向きに対して平均速さ$-v$[m/s] ($v > 0$)で移動しているとき、nを単位体積[1 m^3]における電子数とすると、電流密度jは、e, v, nを用いて$j =$ $\boxed{\quad(1)\quad}$ [A/m^2]と表せる。vが電界Eに比例し$v = \mu E$と表せるとき、μは $\boxed{\quad(2)\quad}$ と呼ばれる。e, n, μ, Eを用いると$j =$ $\boxed{\quad(3)\quad}$ と書ける。これはオームの法則であり、$j = \sigma E$と表したとき、σは導電率（電気伝導度）で、その逆数は抵抗率ρである。

 ところで、金属の電気伝導に関わる電子はフェルミ準位にあるのでその速さv_{F}は、電子の質量をm、ボルツマン定数をk、フェルミ温度をT_{F}とすると、$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{F}}{}^2 =$ $\boxed{\quad(4)\quad}$ より、$v_{\mathrm{F}} =$ $\boxed{\quad(5)\quad}$ となる。このv_{F}は10^6 [m/s]程度と非常に大きく、電場による速さの変化はそれに比べて十分に小さいので、金属線内の電子が散乱を受ける時間間隔tは電界Eの大きさによらないと考えることができる。一つの電子が散乱を受けてから次に散乱を受けるまでに移動する距離をxとすると、$t =$ $\boxed{\quad(6)\quad}$ と表せる。電子の電界方向の平均の速度成分v_E (> 0)は電界による加速度の大きさをaとすると、$v_E = \frac{1}{2}at$となる。ここで$a = eE/m$なので、これを代入してv_Eは$v_E =$ $\boxed{\quad(7)\quad}$ Eと書きかえられる。多数の電子のある時刻から次の衝突までの平均時間をτとすると、$\tau = \frac{t}{2}$なので、μはe, τ, mを用いて$\mu =$ $\boxed{\quad(8)\quad}$ と書ける。

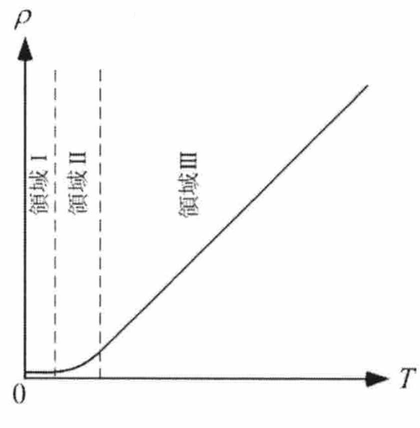
設問 a-d に解答せよ。

a. 空欄(1)～(8)に入る、式または語句を示せ。

b. ρをe, τ, m, nを用いて書け。

c. ある位置から電子が散乱を受けるまでの平均距離lは平均自由行程と呼ばれ、$l = \frac{x}{2}$の関係にあり、τとの関係は$\tau = l/v_{\mathrm{F}}$である。ρを$e, m, n, l, v_{\mathrm{F}}$を用いて書け。

d. 図は超伝導体ではない金属の電気抵抗率の温度依存性を示したものである。領域 I 、II、III について、平均自由行程が長くなる順に並べよ。また、各領域における電子散乱の主因について述べよ。



2. a, b から 1 問を選択し回答せよ。

a. 固体の導電性物質のキャリアが電子であるのか正孔であるのか、通電測定によって判定したい。どのような実験を行えばよいか、原理を含めて提案せよ。

b. p-n 接合を利用した発光ダイオードについて、発光波長を決定する因子を含めて動作原理を説明せよ。

11

コンプトン散乱について、以下の問に答えよ。

光子が自由電子に散乱される物理過程を考える。図 1 のように, 静止した質量 m_e の電子に, エネルギー $h\nu$ の光子が入射し, 光子が角度 θ 方向に散乱され, その光子のエネルギーが $h\nu'$ となり, 電子も角度 ϕ 方向へ散乱された。

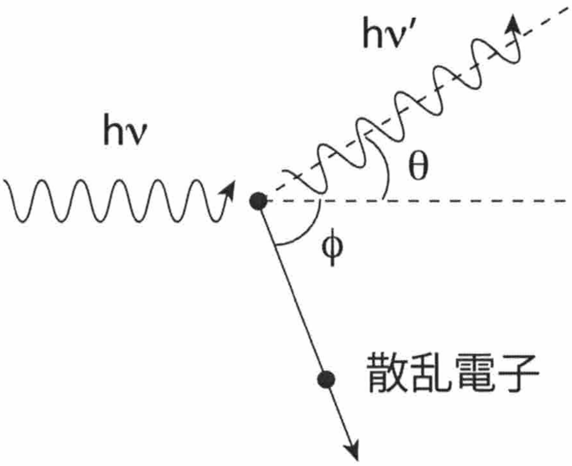


図 1:

問 1. $h\nu'$ と $h\nu$ の間の関係 (コンプトン散乱の式) を求めよ。

問 2. 散乱された電子のエネルギーを $h\nu$ と θ を用いて表わせ。

問 3. 散乱電子のエネルギーが最大となるとき, 観測されるスペクトルには, これに対応してコンプトン散乱による特徴的なコンプトン端と呼ばれる構造が現れる。コンプトン端のエネルギーを $h\nu$ を用いて表わせ。また, ^{137}Cs のガンマ線崩壊する際に放出される 662 keV のガンマ線が入射した時のコンプトン端のエネルギーを計算せよ。

問 4. 入射光子が周囲の物質でコンプトン散乱し, 入射光子と真逆方向に散乱した光子が検出器で観測される事がある (後方散乱ピークと呼ぶ)。この後方散乱ピークのエネルギーを $h\nu$ を用いて表わせ。また, ^{137}Cs のガンマ線崩壊する際に放出される 662 keV のガンマ線が入射した時の後方散乱ピークのエネルギーを計算せよ。

12

問 1. 物理学や数理科学の分野で興味のある研究テーマについて、その背景や解決されるべき点、及び解決のための方法と期待される成果について、簡潔且つ具体的に記述せよ。

問 2. コロナ禍に起因する種々の問題の解決に向けて、物理学や数理科学、あるいはそれらに基づく科学や技術が担う役割について、簡潔且つ具体的に論ぜよ。