1　以下の問に答えよ．

(1) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{Z}$ はいずれも 5 で割り切れないとする．このとき，

$$a_1{}^{20} + a_2{}^{20} + a_3{}^{20} + a_4{}^{20} + a_5{}^{20}$$

は 5 で割り切れるかどうかを答えよ．理由も述べること．

(2) 整数を成分とする 2 次正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{Z})$ とする．$M_2(\mathbb{Z})$ は，行列の通常の和と積で環をなす．環 $M_2(\mathbb{Z})$ の可逆元の全体を $M_2(\mathbb{Z})^\times$ とかく．

(a) $M_2(\mathbb{Z})^\times = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}$ を示せ．

(b) $\begin{pmatrix} 101 & a \\ 13 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})^\times$ となるような $a, b \in \mathbb{Z}$ をすべて求めよ．

(3) G を有限群とする．$|G|$ が素数ならば G は巡回群であることを示せ．

2　パラメータ r, θ $(0 < r < 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ により表される曲面

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \log\left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}\right) - \sqrt{1-r^2} \end{cases}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 第一基本形式を求めよ．

(2) 第二基本形式を求めよ．

(3) ガウス曲率がいたるところ -1 になることを示せ．

(4) 平均曲率が 0 になるような r の値を求めよ．

3　以下の問に答えよ．

(1) $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とし，正則関数 $f(z)$ の実部と虚部をそれぞれ $u(x,y)$, $v(x,y)$ とする．以下の (a), (b) の場合それぞれについて，$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ は正則であるか否かを理由と共に答えよ．

(a) $\begin{cases} U(x,y) = u(y,x) \\ V(x,y) = -v(y,x) \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} U(x,y) = v(-x,y) \\ V(x,y) = u(-x,y) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos\theta + 2i\sin\theta} d\theta$ の値を求めよ．

4 $c > 0$ を定数とする．$u = u(t, x)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 \sin x \ \ (t > 0,\ x \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

について次の問に答えよ．

(1) 変数変換 $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ によって，u が次の偏微分方程式を満たすことを示せ．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right).$$

(2) $u(t, 0) = 0 \ (t > 0)$ が成り立つとき，$u(t, x) = -u(t, -x) \ (t > 0,\ |x| < ct)$ が成り立つことを示せ．

(3) 次の初期条件を満たす $(*)$ の解を求めよ．

$$u(0, x) = 2 \sin x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = x \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

5 以下の命題の真偽をそれぞれ調べよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の 2 項関係

$$x \, R \, y \quad \underset{\text{定義}}{\iff} \quad x_1 + x_2 \le y_1 + y_2 \qquad (x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$$

は順序関係である．

(2) 関数

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) := \min\{|x - y|, 1\} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

は $\mathbb{R}$ 上の距離関数である．

(3) 距離空間 (X, d) 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が連続関数ならば，X の部分集合

$$A := \{x \in X \mid f(x) < 0\}$$

は X の開集合である．