

2022 年度  
青山学院大学  
大学院理工学研究科理工学専攻

# 博士前期課程(9月)入学試験

## 各コース共通問題 「数学」 問題冊子

受験番号：	氏名：
-------	-----

### [注意事項]

1. 問題冊子は表紙を除いて2ページあり，問題は全部で6題ある．6題中3題を選択して解答せよ．
2. 解答冊子は表紙と3枚の解答用紙でできている．問題冊子表紙，解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること．
3. 問題1題ごとに解答用紙1枚を使い，必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること．問題番号の記入がない場合，また2つ以上の番号の記入があった場合には，解答は無効とする．
4. 解答欄が足りない場合には，当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい．その場合，「裏面に続く」と表面の最後に明記すること．
5. 解答冊子，問題冊子とも必ず提出すること．

**1**

線形写像  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$f \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x - z - w \\ x + 3y + 2z + 5w \\ -y - z - 2w \end{pmatrix}$$

により定義するとき、 $f$  の核と像の基底と次元をそれぞれ求めよ。

**2**

行列  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 4 & -6 & -4 \\ -7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$  に対し、以下の間に答えよ。

(1)  $A$  の固有値をすべて求めよ。

(2)  $A$  が対角化可能かどうか判定せよ。対角化可能ならば、 $P^{-1}AP$  が対角行列となるような正則行列  $P$  を1つ求めよ。

(3)  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  とするとき、正の整数  $n$  に対して  $A^n \mathbf{v}$  を求めよ。

**3**

2変数関数

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x-y}$$

について、極大・極小を論ぜよ。ただし、 $a, b$  は正の定数とする。

**4** 次の積分の値を求めよ．ただし  $\sin^{-1} x$  は逆正弦関数を表し， $\arcsin x$  または  $\text{Arcsin } x$  などと書くことがある．

(1)  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(2)  $\int_0^1 x^2 \sin^{-1} x dx$

(3)  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$  のとき  $\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$

**5** 以下の問に答えよ．

(1) 次の関数に対して， $x = 0$  を中心としたテイラー展開（マクローリン展開）を  $x^3$  の項まで求めよ．ただし，剰余項は  $R_4$  と書いておけばよい．

(i)  $f(x) = \log \frac{1-2x}{1+2x}$       (ii)  $f(x) = x\sqrt{1+x}$

(2) 次の極限を求めよ．

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4}$       (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

**6** 微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \quad (x > 0) \quad (*)$$

について次の問に答えよ．

(1)  $x = e^t$  とする．(\*) を， $t$  を独立変数とする微分方程式に書き換えよ．

(2) (\*) の一般解を  $x$  の関数として求めよ．