6

一端が固定されたばね定数 k のばねに質量 m の質点がつながっている。質点の座標と速度をそれぞれを $x(t),\ v(t)$ とする。

問 1. 質点に速度の大きさに比例する抵抗力 $-\gamma v(t)$ が働いている。ここで γ は正の定数である。質点が減衰振動するために γ が満たさなければならない条件を求めよ。

問 2. 質点が減衰振動していて，時刻 $t=0$ で $x(t)=0,\ v(t)=v_0$ であるとき，$x(t)$ を求めよ。

問 3. この質点に振動数 ω_{e} で振動する外力 $F(t)=A\cos\omega_{\mathrm{e}}t$ を $t=0$ から加えた。十分時間が経過した後の $x(t)$ を求めよ。

問 4. 十分時間が経過した後の単位時間あたりに $F(t)$ が質点にする仕事

$$W=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T}F(t)v(t)dt,\ T=2\pi/\omega_{\mathrm{e}} \tag{1}$$

を求め、ω_{e} に対する W のグラフを描け。

7

真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率 μ_0 として以下の問いに答えよ。

問 1. 半径 a の球内に体積密度 ρ で電荷が一様に分布している。

(1) 球の内外の電場の大きさを積分形のガウスの法則を用いて求めよ。また球の中心からの距離 r と電場 $E(r)$ の関係をグラフに示せ。

(2) 球の内外の静電ポテンシャルを求めよ。ただし、無限遠を基準点とする。

問 2. 半径 a の円形の回路に電流 I が流れている。円の中心を原点とし、それに垂直な方向に z 軸をとる。電流は z 軸の正方向から見て反時計回りに流れている。円の中心軸上の点に作る磁場の大きさ $B(z)$ を、以下のビオ・サバールの法則を用いて求めよ。

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

問 3. 半径 a の導体球に電荷 Q が与えられ、その周囲は半径 $b(b > a)$ まで誘電率 ϵ の誘電体球殻で覆われている。導体内および誘電体球殻内の、電束密度、電場、静電ポテンシャルを求めよ。

8

以下の問に答えよ。

問 1　1 次元井戸型ポテンシャル中を運動する粒子の運動を考える。粒子の質量を m とする。粒子は区間 $0 \leq x \leq L$ に閉じ込められているものとする。波動関数を $\varphi(x)$ とする。

1-1) 区間 $0 \leq x \leq L$ におけるシュレディンガー方程式と境界条件を示せ。

1-2) 基底状態のエネルギーと規格化された波動関数を求めよ。

1-3) 基底状態について、運動量を測定した。どのような値が観測されるかを示せ。また、x 軸正の向きに進む粒子が観測される確率を示せ。

問 2　1 次元散乱問題を考える。$x \to -\infty$ 側から入射された質量 m、エネルギー $E = \hbar^2 k^2/(2m)$ の粒子が、座標原点付近 $(0 \leq x \leq L)$ において位置エネルギー $V(x) = V_0(x)$ によって散乱されるものとする。ただし $V_0(x)$ は未知の関数とする。$x < 0$ および $x > L$ では $V(x) = 0$ とする。

2-1) 領域 $x < 0$ および $x > L$ における波動関数を、それぞれ $\varphi_{\mathrm{A}}(x)$ および $\varphi_{\mathrm{B}}(x)$ とする。シュレディンガー方程式の解として、$\varphi_{\mathrm{A}}(x)$ および $\varphi_{\mathrm{B}}(x)$ はどのように表されるか。

2-2) 上の解に対して、散乱問題の境界条件を課す。これによって $\varphi_{\mathrm{A}}(x)$ および $\varphi_{\mathrm{B}}(x)$ はどのように表されるか。

2-3) これらの波動関数から、散乱の透過率（前方散乱確率）T および反射率（後方散乱確率）R はどのように表されるか。また、T と R の間に成り立つ関係式を示せ。

ここで $V_0(x)$ が囲う面積を一定にしたまま $L \to 0$ とすると、デルタ関数を用いて $V(x) = U_0\delta(x)$ とすることができる。このとき、$x < 0$ および $x > 0$ では $V(x) = 0$ なので、問 2-2) の解 $\varphi_{\mathrm{A}}(x)$ および $\varphi_{\mathrm{B}}(x)$ がここでもそれぞれの領域でそのまま解となる。また、このようなデルタ関数型ポテンシャルによる散乱問題の場合、波動関数の接続条件は $x = 0$ において

$$\varphi_{\mathrm{A}}(0) = \varphi_{\mathrm{B}}(0), \qquad \varphi'_{\mathrm{A}}(0) - \varphi'_{\mathrm{B}}(0) = \alpha\varphi_{\mathrm{A}}(0)$$

であることが知られている。ここで $\alpha = 2mU_0/\hbar^2$ である。

2-4) これらを用いて、波動関数 φ_{A} および φ_{B} を求めよ。(以後、α をそのまま用いて良い)

2-5) このときの散乱の透過率 T および R を求めよ。

9

質量 m の粒子 N 個からなる理想気体を考える。気体は $0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L,\ h_1 \leq z \leq h_2$ で領域が指定される箱に閉じ込められいる。粒子には一様な外力 $\boldsymbol{f} = (0, 0, -mg)$ が作用しており、温度 T の熱平衡状態にある。以下の問いに答えよ。

問 1. 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ にある粒子のもつポテンシャルエネルギー $V(x, y, z)$ を求めよ。ただし、エネルギーの基準として $V(x, y, 0) = 0$ とせよ。

問 2. この系の分配関数 Z を計算せよ。

ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

を用いてよい。

問 3. この系のヘルムホルツ自由エネルギー F を求めよ。

問 4. 次の量 $p_1,\ p_2$ を計算し、$\Delta p = p_1 - p_2$ を求めよ。

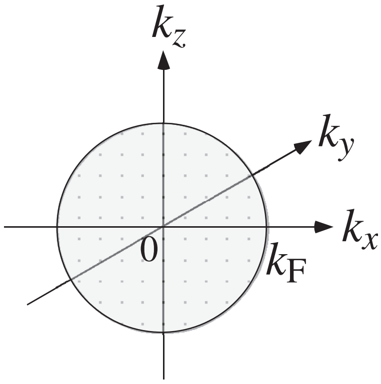
$$p_1 = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial F}{\partial h_1} \right), \quad p_2 = -\frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial F}{\partial h_2} \right)$$

問 5. 問 4 で計算した量 $p_1,\ p_2$ は、物理的にはどのような意味を持つ量であるか述べよ。

問 6. 問 4 で求めた Δp について物理的考察をせよ。

10

大きい金属の塊のなかの電子の状態を自由電子モデルで考える。下図に 3 次元の k 空間で電子が $k = 0$ を中心とした半径 k_F の球の内部の状態を占めている様子を示した。温度は 0 K である。k は波数で波長 λ とは $k = 2\pi/\lambda$ の関係にあり、一般に質量 m、速さ v の粒子の運動は、$\lambda = h/mv = h/p$ の波と等価である（h はプランク定数、p は運動量）。設問 a–f に解答せよ。



a. 電子の質量を m、運動量を p としたとき、電子の運動エネルギー E は $E = p^2/2m$ である。E を $m, \hbar\,(= h/2\pi), k$ を用いて表せ。

b. フェルミエネルギー E_F を、$m, \hbar, k_F$ を用いて表せ。

c. この球の内部で電子が占有できる状態の密度は一定で ρ とすると、半径 k' $(\leq k_F)$ の球内の状態数 N は $\dfrac{4}{3}\pi k'^3\rho$ と書ける。つまり、N は k'^3 に比例する。よって問題 a の関係より、$N \propto E^A$ と書き直せる。A を示せ。

d. E の微小な範囲 ΔE にある状態数 $N(\Delta E)$ は、$N \propto E^A$ の関係を E で微分すればよく、$N(\Delta E) \propto E^B$ と表せる。B を示せ。

e. エネルギー E において電子が状態を占める確率 $f(E)$ を示すフェルミ–ディラックの分布関数を、以下に示した。ここでの k はボルツマン定数である。

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{E - E_F}{kT}\right) + 1}$$

この式より、E_F 近傍における電子占有確率の温度による変化を説明せよ。

f. 時刻 $t = 0$ において、電場を $x\,(k_x)$ の正の向きに印加した。$t = 0$ での電子占有状態を表していた球は時刻とともに k 空間でどのように変化し、十分に時間が経過した後どのような状態になっているか？ オームの法則を考慮して解答せよ。

11

プランクの黒体放射の式は

$$I_\lambda d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}d\lambda$$

で表される．ここで、I_λ は放射強度、λ は波長、h はプランク定数、c は光速、k はボルツマン定数、そして、T は黒体温度である．以下の (1) から (5) の問を答えよ．

(1) 気体や光子がどのような状態の時に、何がプランクの黒体放射の式で記述されるのか述べよ．

(2) ステファン・ボルツマンの法則を導け．ただし、導出途中で出てくる係数 (積分) は計算せず、定数のままで良い．

(3) レイリー・ジーンズ則を導け．

(4) ウィーン則を導け．

(5) ウィーンの変位則を導け．ただし、必要であれば、$x = 3(1 - e^{-x})$ の解は $x = 2.82$、$y = 5(1 - e^{-y})$ の解は $y = 4.97$ を用いよ．

12

問 1. 物理学や数理科学の分野での興味のある研究課題について、その課題の背景や解決されるべき点、及び解決のための手法と期待される結果について、簡単かつ具体的に論じよ。

問 2. 今、社会や人類が直面している様々な問題の一つを題材に、物理学や数理科学、あるいはそれらに基づく科学や技術がその解決に果たす役割について、思うところを論じよ。