1　以下の問に答えよ．

(1) $a, b \geq 1$ を整数とし，$g = \gcd(a,b)$ を a, b の最大公約数とする．集合 I を $I = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ で定める．このとき，$g \in I$ を示せ．また，$I = g\mathbb{Z}$ であることを示せ．

(2) 9 次対称群 S_9 の元

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

を考える．

(a) σ を互いに素な巡回置換の積に分解せよ．また，σ の巡回置換型を答えよ．

(b) σ と共役な S_9 の元を σ 以外にひとつ挙げよ．

(c) (b) で挙げた元を τ とする．$\tau = \phi\sigma\phi^{-1}$ となるような $\phi \in S_9$ をひとつ挙げよ．

2　パラメータ (u, v) について，

$$\begin{cases} x &= \cosh u\,(\cos v - \sin v) \\ y &= \cosh u\,(\cos v + \sin v) \\ z &= \sqrt{2}\,u \end{cases}$$

により与えられる曲面のガウス曲率と平均曲率を求めよ．

3

(1) $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z - 3}{z^4 + 3z^3 + 3z^2 + z}$ とする．

(a) $f(z)$ の部分分数分解を求めよ．

(b) $f(z)$ の孤立特異点を求め，各孤立特異点を中心とするローラン級数展開の主要部を答えよ．

(2) 以下の複素線積分の値を求めよ．ただし，$f(z)$ は問題 (1) のものであり，$\sqrt{z}$ は主値，つまり偏角の範囲を $-\pi < \arg z \leq \pi$ とした分枝とする．

(a) $\displaystyle\int_{|z+1|=2} f(z)\,dz$　　(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^2 e^{-1/z} dz$　　(c) $\displaystyle\int_{|z+i|=1/2} \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}\,dz$

4 次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + x\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \ \bigl((x,y) \in \mathbb{R}^2\bigr)$$

について以下の問に答えよ.

(1) a を定数とする. xy-平面上において, 次のように媒介変数表示される曲線上で, $u(x,y)$ が一定であることを示せ.

$$\begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = \dfrac{1}{2}\,s^2 + a \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

(2) $u(0,0) = 1$ と定める. $u(x, \dfrac{1}{2}\,x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ を求めよ.

(3) $u(x,0) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ と定める. $u(x, \dfrac{1}{2}\,x^2 - \dfrac{1}{2}\,\pi^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ を求めよ.

5 $(X,\mathcal{O})$, $(X',\mathcal{O}')$ を位相空間，$f : (X,\mathcal{O}) \to (X',\mathcal{O}')$ を連続写像とする．次の主張が正しい場合は証明し，必ずしも正しくない場合は反例を挙げよ．

(1) A が $(X,\mathcal{O})$ の有限部分集合ならばコンパクトである．

(2) A が $(X,\mathcal{O})$ の閉集合ならば，$f(A)$ は $(X',\mathcal{O}')$ の閉集合である．

(3) $(X,\mathcal{O})$ がコンパクト位相空間のとき，A が $(X,\mathcal{O})$ の閉集合ならばコンパクトである．