6

地上での重力加速度の大きさを g とする。また，空気抵抗等は無視できるとする。

下図のように伸び縮みしない質量を無視できるワイヤがある。その一端には質量 m の（質点とみなせる）おもりを固定し，釘 P，R と滑車 Q を経由して，他端は床に固定されたばね定数 k のばねに固定されている。滑車 Q と回転軸受けとの間の摩擦は無視できる。滑車 Q は，ワイヤーから与えられるトルクが Q を時計回りに回転させるときには，ワイヤーと滑ることなく回転する。反対に，ワイヤーからのトルクが Q を反時計回りに回転させる方向に働くときには，ワイヤーは Q の上をなめらかにすべり，摩擦力は無視できる。

滑車 Q は，質量 M，半径 a，厚さ d の円盤で，その密度 ρ は回転軸からの距離 r の関数 $\rho = \rho_0(r + a/2)$ で表される。下図のように x 軸をとり，おもりに働く重力の大きさとばねの復元力がつりあう点を原点とする。おもりを $x = -\ell$ の位置まで引っ張り，時刻 $t = 0$ にそっと放した。

(問.1) 滑車 Q の回転軸まわりの慣性モーメント I を M，a を用いて表わせ。また以下の設問では I を用いて答えてよい。

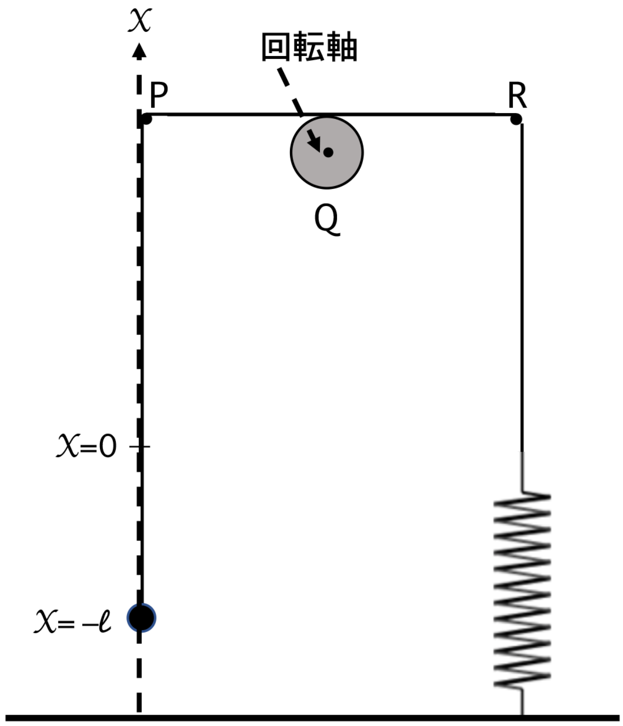
(問.2) おもりの位置を $x(t)$ とする。$x(t) < 0$ のときおもりの運動方程式をもとめよ。

(問.3) 上記方程式を解いて，$x(t)$ を式で表わせ。

(問.4) おもりが原点 $x = 0$ を通過するときの速度をもとめよ。

(問.5) おもりが到達する最上点の座標 (釘 P の下方) を答えよ。

(問.6) このときの滑車 Q の回転エネルギーをもとめよ。



7

真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率 μ_0 として以下の問いに答えよ。

問 1. 半径 a の無限に長い円柱の内部に、電荷が体積密度 ρ で一様に分布している。

(1) 円柱の内外に生じる電場の大きさを求めよ。また中心軸からの距離 r と電場の関係をグラフに示せ。

(2) 円柱の外側の静電ポテンシャルを求めよ。ただし、$r = r_0(> a)$ を基準点とする。

問 2. 半径 a の無限に長い円柱状の導体に、電流が電流密度 i で一様に流れている。

(1) 円柱の内外の磁場の向きと磁束密度の大きさを求めよ。また中心軸からの距離 r と磁束密度の関係をグラフに示せ。

(2) 円柱の外側のベクトル・ポテンシャルの向きと大きさを求めよ。ただし、$r = r_0(> a)$ を基準点とする。

問 3. 半径 a の無限に長い円柱状の領域の内部に一様な磁場が円柱に沿った向きに存在する。磁場の大きさが $B(t) = B_0 t$ で表されるように時間とともに一定の割合で上昇するとき、円柱内外に発生する電場の向きと大きさを求めよ。

8

スピン演算子について、以下の問に答えよ。

スピン角運動量演算子 $\hat{S}_\alpha(\alpha = x, y, z)$ は、パウリ行列を用いて $\hat{S}_\alpha = (\hbar/2)\sigma_\alpha$ であらわされる。ここで、パウリ行列 σ_x、σ_y、σ_z は

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と 2×2 行列で定義される。また、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものであり、i は虚数単位である。

1) パウリ行列を用いて、角運動量に関する交換関係 $[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = \mathrm{i}\hbar\hat{S}_y$ が確かに満たされることを示せ。

2) $\hat{S}_x$ の固有ベクトルが $\vec{\chi}_{x+} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\vec{\chi}_{x-} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ であることを示し、それぞれの固有値を求めよ。

3) $\vec{\chi}_{x\pm}$ が S_z の固有ベクトルではないことを示せ。この結果を交換積と関連付けて議論せよ。

4) z 軸方向の磁場中におけるスピンのハミルトニアンは $\hat{\mathcal{H}} = \mu_{\mathrm{B}}\sigma_z H$ で与えられる。ここで μ_{B} はボーア磁子と呼ばれる定数で、H は磁場の z 成分である。このときの、スピンのエネルギー準位をすべて求めよ。

5) 強さ H の磁場中におかれたスピンに対して、振動数 ν の電磁波をあてる。何がおきるか説明せよ。

9

質量 m の気体分子 N 個からなる理想気体が体積 V の容器の中に入っており、温度 T の熱浴に接している。系の古典的ハミルトニアンは、$\boldsymbol{p}_i = (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz})$ を粒子 $i\ (= 1, 2, \cdots, N)$ の運動量として、次の式により与えられる。

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}$$

以下の問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数を k_B、プランク定数を $h(= 2\pi\hbar)$ とする。

問 1. この系の分配関数 Z が次式で与えられることを示せ。

$$Z = \frac{1}{N!}\left[\frac{V}{\lambda_{\mathrm{th}}^3}\right]^N$$

ただし、$\lambda_{\mathrm{th}} = 2\pi\hbar/\sqrt{2\pi m k_B T}$ である。途中の計算過程をきちんと示すこと。

問 2. この系のヘルムホルツ自由エネルギー F を求め、圧力を計算せよ。

問 3. 上で求めた圧力の表式と、自由エネルギーの二階の微係数の間に成り立つマクスウェルの関係式を用いて、この系のエントロピーの体積依存性を求めよ。

問 4. この系の定積熱容量を求めよ。

問 5. ここで行なった古典統計力学的な解析は、低温では量子効果のために成り立たなくなる。量子効果が顕在化しはじめる目安となる温度を $m, N, V, k_B, \hbar$ を用いて表せ。（ヒント：問 1 の分配関数の表式にある λ_{th} の意味を考え、それと気体分子間の平均間隔とを比較してみよ。）

10

問 1　同種原子からなる 1 次元結晶について以下の問いに答えよ。

（１）格子定数を a とするとき、この 1 次元結晶の逆格子点を図示せよ。ただし、隣り合う逆格子点間の距離を明示すること。

（２）隣り合う原子間をばね定数 K のばねで連結した調和振動子モデルを用いて、有限温度における格子振動を考える。n 番目の原子の平衡位置からの変位を $u(na,t)$ とし、各原子の質量を M とするとき、n 番目の原子の変位 $u(na,t)$ に対する運動方程式を求めよ。

（３）原子の総数を N として周期的境界条件 $u(Na,t)=u(0,t)$ を仮定し、（２）で求めた運動方程式の解として、結晶全体を伝搬する平面波解 $u(na,t)\propto e^{i(kna-\omega t)}$ を仮定するとき、角振動数 ω と波数 k の間の分散関係を求め、第一ブリルアンゾーンの範囲内で図示せよ。

（４）この 1 次元結晶の大きさを L とし、結晶に含まれる自由電子の総数を N_e として、絶対零度における電子状態を考える。周期的境界条件を適用すると、自由電子の質量 m とプランク定数 $\hbar(\equiv h/2\pi)$ を用いて、各自由電子のエネルギーが $\varepsilon_k=(\hbar^2/2m)k^2$（ただし、$k=(2\pi/L)n$、$n$ は任意の整数）で表されることを考慮すると、３次元自由電子系のフェルミ球の体積が、１次元自由電子系では 2 つのフェルミ点 $(k=+k_{\mathrm{F}}$ と $k=-k_{\mathrm{F}})$ 間距離に対応することが分かる。このとき、スピンの自由度 2 を考慮して、１次元電子系の k_{F} を N_e と L を用いて表せ。

（５）（４）で求めた関係を用い、絶対零度における自由電子の内部エネルギー $E(=2\sum_{|k|<k_{\mathrm{F}}}\varepsilon_k)$ を N_e と $E_{\mathrm{F}}(=[\hbar^2/2m]k_{\mathrm{F}}^2)$ を用いて表せ。

問 2　以下の項目から 1 つを選び、その内容を図示して分かりやすく説明せよ。

（１）　エネルギーバンド理論における金属と絶縁体の違い

（２）　半導体の pn 接合における整流効果

（３）　磁化の外部磁場依存性における第 1 種超伝導体と第 2 種超伝導体の違い

11

高エネルギー宇宙線は地球の大気上空の原子と衝突し高エネルギーのミュー粒子を作る。このミュー粒子は高度 約 6 km から地上に到達することが知られている。ミュー粒子の静止系では平均寿命 $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s で電子とニュートリノに崩壊する。ミュー粒子が光速 $c\ (= 3 \times 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}})$ で運動したとしても平均的な距離は $\tau \times c = 660$ m となり、ミュー粒子は地上では観測することができないことになる。以下の問いに答えよ。

問 1. ある慣性系 K (x, y, z, t) とそれに対して x 軸方向へ速度 v で運動している慣性系 K′ (x', y', z', t') においてローレンツ変換の式を書け。ただし、$\dfrac{v}{c} = \beta$、$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を用いて書け。

問 2. K′ 系の原点 O′ に固定されている時計で測った時間間隔を t'、また、K に固定されている時計で測った時間間隔を t とした時、t' は t を用いてどのように書けるか。また、この結果は何を意味するか述べよ。

問 3. 問 2 の結果を踏まえ、ミュー粒子の観測を再考し、ミュー粒子は問題なく 6 km という距離を移動でき、地上に到達できることを示せ。ただし、ミュー粒子の速度は $0.999c$、その時の $\sqrt{1-\beta^2} = 0.044$ とする。

12

(1) 物理学あるいは数理科学の分野での興味のある課題について、なぜ興味があり、何がどこまで明らかにされることが目指され、それがもたらす成果について、簡単かつ具体的に論じよ。

(2) 日本に典型的である人口減少や高齢化の問題、その他、環境汚染やエネルギー問題、食糧問題等々、今後の社会の動向に決定的な影響を与えるであろう諸々の問題の一つを題材に、物理学や数理科学、あるいはそれらに基づく科学や技術がその解決に果たす役割について、思うところを論じよ。