1　以下の問に答えよ．

(1) A を実 n 次正方行列とする．A が直交行列であることの定義を述べよ．

(2) A が直交行列であるとき，$\det A = \pm 1$ を示せ．

(3) n 次実直交行列の全体を $O(n)$ とする．$O(n)$ は行列の積に関して群をなすことを示せ．

(4) $O(n)$ の元 A であって $\det A = 1$ を満たすものの全体を $SO(n)$ とする．$SO(2)$ の任意の元は，$\theta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表せることを示せ．

(5) $O(3)$ の元であって $SO(3)$ の元でないものの例を一つ挙げよ．

2　(u, v) をパラメータとする曲面

$$\begin{cases} x = -3u + 1 \\ y = v\cos u \\ z = -v\sin u \end{cases} \qquad (0 \leqq u < 2\pi,\ v \in \mathbb{R})$$

について，ガウス曲率と平均曲率を求めよ．

3　n を 2 以上の整数とし，複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^n + 1}$ を考える．

(1) $f(z)$ の孤立特異点と，そこでの留数を全て求めよ．

(2) $R > 1$ を実数とし，曲線 C を $C = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}\}$ で定める．このとき $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)\,dz = 0$ であることを示せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^n + 1}dx$ の値を求めよ．

4　次の初期条件および境界条件を満たす熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1,\ \ t > 0) \qquad \begin{cases} u(x,0) = 0 & (0 < x < 1) \\ u(0,t) = b & (t > 0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

について次の問に答えよ．ただし，b は定数であり，この初期値・境界値問題の解を $u(x,t)$ とする．

(1) $v(x,t)$ を初期値・境界値問題

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1,\ \ t > 0) \qquad \begin{cases} v(x,0) = -b & (0 < x < 1) \\ v(0,t) = 0 & (t > 0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

の解とすると，$u(x,t) = b + v(x,t)$ となることを示せ．

(2) $u(x,t)$ を求めよ．

5

(1) $M(n,\mathbb{R})$ を n 次実正方行列全体からなる集合とし，$M(n,\mathbb{R})$ 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$A \sim B \underset{\text{定義}}{\iff} \text{ある } n \text{ 次正則行列 } P \text{ が存在して } AP = PB$$

により定義する．このとき，$\sim$ は $M(n,\mathbb{R})$ 上の同値関係であることを示せ．

(2) 自然数 $n \geqq 1$ に対して，関数 $d_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$d_n(x,y) := |x^n - y^n|, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

により定義する．このとき，$(\mathbb{R}, d_n)$ は距離空間になるかどうかを調べよ．

(3) 距離空間 (X,d) の部分集合 A, B に対して

$$A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$$

が成り立つことを示せ．ただし，$A^\circ, B^\circ, (A \cap B)^\circ$ は，それぞれ $A, B, A \cap B$ の内部を表す．