

# 2023年度 実力試験

## 専門問題

2024年1月16日(火)  
14:00～16:00(120分)

### 解答上の注意

- 問題は全部で9題ある。そのうち 4題 を選択して答えよ。
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し、選択した問題番号を所定の欄に明記すること。問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、解答用紙はすべて提出すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。但しその旨を表面に明記すること。
- 試験開始から30分経過した後は、解答用紙を提出の上、退出を認める。



**1**  $r = r(x)$  を  $\mathbb{R}$  上で定義された連続関数とする.  $x$  を独立変数,  $y$  を従属変数とする微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = r - \frac{e^x}{1 + e^x} y \quad (*)$$

は特殊解  $y(x) = 1 + e^x$  をもつとすると, 以下の問に答えよ.

- (1) 連続関数  $r = r(x)$  を求めよ.
- (2)  $(*)$  の解  $y = y(x)$  に対して,  $z(x) = y(x) - (1 + e^x)$  とおくと,  $z(x)$  が満たす微分方程式を求めよ.
- (3)  $(*)$  の一般解を求めよ.
- (4) 次の初期値問題

$$\frac{du}{dx} = -ru^2 + \frac{e^x}{1 + e^x} u, \quad u(0) = \frac{2}{5}$$

の解を求めよ. 但し,  $r$  は (1) で求めた関数  $r = r(x)$  とする.

**2** 以下の問に答えよ.

- (1)  $a, b$  を整数として,  $I = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$  とする.
  - (a)  $0 \in I$  を示せ.
  - (b)  $n_1, n_2 \in I$  ならば  $n_1 \pm n_2 \in I$  であることを示せ.
  - (c)  $n \in I, c \in \mathbb{Z}$  ならば  $cn \in I$  であることを示せ.
- (2)  $G$  を群とする.
  - (a) 部分群  $H \subset G$  が  $G$  の正規部分群であることの定義を述べよ.
  - (b)  $H_1$  と  $H_2$  がともに  $G$  の正規部分群ならば,  $H_1 \cap H_2$  は  $G$  の正規部分群であることを示せ.
  - (c)  $G$  が可換群ならば,  $G$  の任意の部分群は正規部分群であることを示せ.

**3** 以下の問に答えよ.

(1) 以下の無限級数の収束発散を判定せよ. 判定の理由, 根拠を簡潔に述べること.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(ii)  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  に対して,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$

(2) 以下の問に答えよ.

(i) 広義積分  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \log(1+x^2) dx$  を計算せよ.

(ii) 広義積分  $\int_0^1 \frac{1}{x^s} \log(1+x^2) dx$  が収束するような実数  $s \in \mathbb{R}$  の範囲を求めよ.

**4** 以下の命題の真偽を調べよ.

(1)  $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$  は可算集合である.

(2) 写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が連続ならば,

$$d(x, y) := |f(x) - f(y)| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

は  $\mathbb{R}$  上の距離関数である.

(3)  $\mathbb{Q}$  をユークリッド空間  $\mathbb{R}$  の部分集合とみたとき,  $0$  は  $\mathbb{Q}$  の境界点である.

(4) ユークリッド空間  $\mathbb{R}$  の部分集合  $A$  が可算無限集合ならば,  $A$  はコンパクトでない.

**5**  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 2)^3}$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $f(z)$  の孤立特異点をすべて求め, そこでの留数を求めよ.
- (2) 原点を中心とする半径  $R$  の円のうち, 虚部が 0 以上の部分を  $C_1$  とするとき,  
 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz$  の値を求めよ.
- (3)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)^3} dx$  の値を求めよ.

**6** 以下の問に答えよ.

- (1)  $\mathbb{R}$  の部分集合  $A$  が可算集合ならば零集合であることを示せ.
- (2) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x|}{1 + e^{-n|x|}}\right) dx$  を求めよ.
- (3) 1 次元ルベーグ測度  $\lambda$ , ルベーグ可測関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  および定数  $M > 0$  に対して,

$$\lambda(\{|f| > M\}) \leq \frac{1}{M^2} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda$$

が成り立つことを示せ. 但し,  $\{|f| > M\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| > M\}$  である.

**7**  $C^2$  級関数  $u(t, x)$  に関する以下の初期値・境界値問題について、フーリエ展開を用いて解を見出す手順を示すとともに、解を求めよ。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & (t > 0, 0 < x < \pi) \\ u(0, x) = (2 \sin x)^3, & (0 < x < \pi) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, & (0 < x < \pi) \\ u(t, 0) = 0, & (t > 0) \\ u(t, \pi) = 0, & (t > 0) \end{cases}$$

**8** 空間内の曲面が、関数

$$z = \log \left( (x-1)^2 + y^2 \right) - \log \left( (x+1)^2 + y^2 \right) \quad ((x, y) \neq (\pm 1, 0))$$

により与えられるとき、以下の間に答えよ。但し、 $a$  を定数とする。

- (1)  $y$  軸上の点  $(0, a, 0)$  における単位法線ベクトルと接平面の方程式を求めよ。
- (2)  $y$  軸上の点  $(0, a, 0)$  におけるガウス曲率  $K$  と平均曲率  $H$  を求めよ。

**9** 以下の問に答えよ.

(1)  $p$  を  $0 < p < 1$  を満たす定数とする. また,  $X$  を  $0$  以上の整数に値をもち,  $X = r$  の確率が  $P(X = r) = (1 - p)^r p$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$  によって与えられる確率変数とする.

(a)  $s$  を非負の整数とすると,  $P(X \geq s)$  を求めよ.

(b)  $s, t$  を非負の整数とすると, 条件付確率  $P(X \geq s + t | X \geq s)$  を求めよ.

(c)  $X$  の期待値を求めよ.

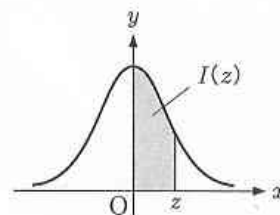
(2) 正規分布  $N(m, \sigma^2)$  に従う確率変数  $X$  に対して,

$$P(X \geq 82) = 0.2266, \quad P(X \leq 46) = 0.0668$$

が成り立つとする. このとき, 下の正規分布表を利用して,  $X$  の平均と分散を求めよ.

付表 2 正規分布表 I

$$z \rightarrow I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767