

2023年度 実力試験

基礎問題

2024年1月16日(火)

13:00 ~ 13:45 (45分)

解答上の注意

- 問題は全部で2題ある。全ての問題に解答すること。
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し、解答した問題番号を所定の欄に明記すること。問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、解答用紙は2枚とも提出すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。但しその旨を表面に明記すること。
- 途中退出は不可とする。

1 以下の問に答えよ.

(1) 以下の極限を求めよ.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - e^x} + \frac{1}{x} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$

(2) 以下の問に答えよ.

(a) 平面の極座標変換 $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

のヤコビ行列式を求めよ.

(b) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq 1$ の共通部分の体積 V を求めよ.

2 以下の間に答えよ.

(1) 数ベクトル空間 \mathbb{R}^4 の元

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ b \end{pmatrix}$$

を考える. 但し, a, b は定数とする.

(a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が線形従属 (一次従属) であるような a, b の値を求めよ.

(b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が \mathbb{R}^4 の基底であるような a, b は存在するかどうか理由も合わせて判定せよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(a) A の固有値を求めよ.

(b) A が対角化可能であるかどうか理由も合わせて判定せよ.