2022年度　実力試験
専門問題（数学）

2023 年 1 月 20 日（金）
14 : 00 〜 16 : 00 (120 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 9 題ある．そのうち 4 題 を選択して答えよ．
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し，選択した問題番号を所定の欄に明記すること．問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，解答用紙はすべて提出すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 試験開始から 30 分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める．

1 $r = r(x)$ を区間 I 上で定義された C^1 級関数とする． x を独立変数，y を従属変数とする微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ry = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + r\frac{dy}{dx} + \frac{dr}{dx}y = 0 \tag{1b}$$

について以下の問に答えよ．

(1) (1a) の解は，(1b) の解であることを示せ．

(2) $y(x) = \varphi(x)$ を (1a) の解とする．$y(x) = \varphi(x)\psi(x)$ が (1b) の解であるとき，$\varphi(x)\psi'(x)$ は x に依存しない定数であることを示せ．

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \tan x\frac{dy}{dx} - \left(\tan^2 x + 1\right)y = 0,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

2 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の可逆元全体の集合を $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ とする．$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ の乗法（掛け算）に関する乗積表を書け．

(2) σ_1 を 4 次対称群 S_4 の単位元とする．また，$\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in S_4$ を

$$\sigma_2 = (12)(34), \quad \sigma_3 = (13)(24), \quad \sigma_4 = (14)(23)$$

とする．ここで，(ij) は互換を表す．このとき，S_4 の部分群

$$V = \left\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\right\} \subset S_4$$

の乗積表を書け．

(3) 群準同型写像の定義を述べよ．

(4) (1) の群 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ と (2) の群 V が同型であることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問に答えよ.

(1) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)x^{3n}$ の収束半径を求めよ.

(2) 実数の定数 s に対して広義積分 $I(s)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^s(1-x)}}\,dx$ を考える.

(2-a) 積分 $I(s)$ が収束するような実数 s の範囲を求めよ.

(2-b) $s=1$ のとき，広義積分 $I(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ を計算せよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下を証明せよ.

(1) X, Y, Z を空でない集合とし，$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を写像とする．このとき，f と g の合成写像 $g\circ f:X\to Z$ が全射ならば，g は全射である.

(2) 次の関数 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の距離関数である.

$$d(x,y):=\sqrt{|x-y|^2+|x-y|}\qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

(3) 距離空間 (X,d) の任意の部分集合 A に対して，$\partial A=\partial(A^c)$ が成り立つ．ただし，∂A は A の境界，$\partial(A^c)$ は A の補集合 A^c の境界を表す.

5 $f(\theta) = \dfrac{1}{e^{i\theta}(3 + 2\cos\theta + i\sin\theta)}$ とし，$z = e^{i\theta}$ とする．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ を z を用いて表せ．

(2) $f(\theta)$ を z を用いて表せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$ の値を求めよ．

6

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\{f_n\}$ を X 上の $\mathbb{R}$ 値可測関数列とする．また，$g : X \to \mathbb{R}$ を X 上で可積分な可測関数とする．このとき，以下の主張は成り立つか．常に成り立つ場合は証明し，必ずしも成り立たない場合は反例を挙げよ．

(1) $\{f_n\}$ は n について単調増加であり，かつ任意の $n \geq 1$ に対して X 上で $f_n \geq g$ が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

(2) $\{f_n\}$ はある可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に X 上で各点収束し，かつ f が X 上で可積分ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

(3) $\{f_n\}$ はある可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に X 上で各点収束し，かつ任意の $n \geq 1$ に対して X 上で $|f_n| \leq 1$ が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

7 以下の問に答えよ．

(1)「2 回連続的微分可能関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，φ を共通に含む次の 2 つのコーシー問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\ x) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\ x), \\ u(0,\ x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (-\infty < x < +\infty,\ -\infty < t < +\infty)$$

および

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\ x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\ x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\ x) = \varphi'(x), \\ u(0,\ x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (-\infty < x < +\infty,\ -\infty < t < +\infty)$$

は唯一つの解を共有する」という命題に対して，命題が正しければ証明し，誤りであれば反例を与えよ．その際，2 つのコーシー問題それぞれに対する解の一意性については周知としてよい．

(2) 次のコーシー問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\ x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\ x) \\ u(0,\ x) = (2\cos x)^3 \end{cases} \quad (-\infty < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty)$$

8 実数パラメータ u, v により表される曲面

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u + \cos v \quad (0 < u < 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}) \\ z = \sin v \end{cases}$$

について，$(u, v) = (u, 0)$ におけるガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ．また，$(u, v) = (u, 0)$ におけるガウス曲率が 0 となる u と, 平均曲率が 0 となる u をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ ド・モワブル-ラプラスの定理 (中心極限定理) を用いて，次の問に答えよ．ただし，標準正規分布に従う確率変数 T に対して，$T \geqq 1.96$ の確率 $P(T \geqq 1.96)$ がほぼ 0.025 であること，$T \geqq 2.58$ の確率 $P(T \geqq 2.58)$ がほぼ 0.005 であることを用いてよい．また，ともに母比率は p として解答せよ．

(1) あるテレビ番組の視聴率を 300 人を対象に行ったところ 25% であった．母集団全体での視聴率に対する信頼度 95% および 99% の信頼区間を求めよ．

(2) あるコインを 100 回投げたところ表の回数が 42 回だった．このコインには偏りがあると言ってよいか．検定すべき帰無仮説を述べて，危険率 5% および 1% で検定せよ．