# 2021年度　実力試験

# 専門問題（数学）

2022 年 1 月 20 日（木）
14:00 〜 16:00 (120 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 9 題ある．そのうち 4 題 を選択して答えよ．
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し，選択した問題番号を所定の欄に明記すること．問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，解答用紙はすべて提出すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 試験開始から 30 分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める．

$\boxed{\textbf{1}}$ $a>0,\ b\geq 0$ とする．$x$ を独立変数，$y$ を従属変数とする次の初期値問題について以下の問に答えよ．

$$\frac{dy}{dx}=e^{-ax}y^2+by, \quad y(0)=1$$

(1) $b=0$ とする．初期値問題の解を求めよ．

(2) $b=0$ とする．初期値問題の解に対して，$\displaystyle\lim_{x\to B-0}y(x)=\infty$ となる正の実数 $B$ が存在するような $a$ の条件を求めよ．

(3) $b=a$ とする．初期値問題の解を求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$ 以下の問に答えよ．

(1) $m,n$ を自然数とする．$\gcd(\underbrace{11\cdots 11}_{m\text{ 個}},\underbrace{11\cdots 11}_{n\text{ 個}})$ を求めよ．結果だけでなく簡単な説明を述べること．

(2) $1^8+7^8+11^8+13^8+17^8+19^8+23^8+29^8$ を 30 で割った余りを求めよ．結果だけでなく簡単な説明を述べること．

(3) $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b,c,\in\mathbb{R}, ac\neq 0\right\}$ とする．$G$ は行列の積に関して群をなすことを示せ．行列の積が結合律を満たすことは既知としてよい．

(4) 群 $G$ とその部分群 $H$ が与えられたとき，$g_1,g_2\in G$ に対して同値関係 $g_1\sim g_2$ を

$$g_1\sim g_2 \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad g_1^{-1}g_2\in H$$

で定める．このとき，$g\in G$ の定める同値類を $gH$ とすると，

$$gH=\{gh\,|\,h\in H\}$$

であり，これを $g$ の $H$ に関する左剰余類という．また，左剰余類全体の集合を左剰余空間といい，$G/H$ と表す．

左剰余空間 $GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R})$ は集合 $\mathbb{R}-\{0\}$ と同一視できることを示せ．

**3** 以下の問に答えよ．

(1) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{n^2} x^n$ の収束半径を求めよ．

(2) 実数の定数 $\alpha$ に対して広義積分 $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^{\alpha}+1)}$ を考える．

(2-a) 積分 $I(\alpha)$ が収束するような $\alpha$ の範囲を求めよ．

(2-b) $\alpha=1$ のとき，広義積分 $\displaystyle I(1)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ を計算せよ．

**4** 以下の問に答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ にはユークリッド距離が入っているものとする．

(1) 写像 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ の合成写像 $g\circ f$ が単射ならば，$f$ は単射であることを示せ．

(2) $\mathbb{C}$ 上の 2 項関係「$zRw \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \overline{z}w\in\mathbb{R}$」は同値関係かどうか調べよ．ただし，$\overline{z}$ は $z$ の共役複素数を表す．

(3) $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ の閉包を求めよ．

(4) 連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して，$U:=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)>0\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合であることを示せ．

**5** 以下の問に答えよ．ただし，$a$ を正の実数とし，$f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z^2+3}$ とする．

(1) $f(z)$ の孤立特異点を全て求め，そこでの留数を求めよ．

(2) 原点を中心とする半径 $R$ の円周のうち，虚部が 0 以上の部分を $C_1$ とするとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)\,dz=0$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^2+3}dx$ の値を求めよ．

**6**

$(X,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間，$g:X\to\mathbb{R}$ を非負可測関数とし，集合関数 $\nu:\mathcal{F}\to\overline{\mathbb{R}}$ を

$$\nu(A):=\int_A g\,d\mu,\qquad A\in\mathcal{F}$$

で定義する．このとき，次を示せ．

(1) $\nu$ は可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の測度である．

(2) 可測関数 $f:X\to\mathbb{R}$ が非負単関数ならば，つまりある非負実数 $0\le a_1<a_2<\cdots<a_n$ が存在して $f=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_j\mathbf{1}_{\{f=a_j\}}$ と表せるならば，$\displaystyle\int_X f\,d\nu=\int_X fg\,d\mu$ が成り立つ．

(3) 可測関数 $f:X\to\mathbb{R}$ が測度 $\nu$ に関して可積分ならば，$fg$ は測度 $\mu$ に関して可積分であり，$\displaystyle\int_X f\,d\nu=\int_X fg\,d\mu$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の初期値・境界値問題 $(*)$ を考える．

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 & (0 < x < \pi,\ 0 < t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,\ t) = 0 & (0 < t) \\ u(x,\ 0) = \cos 3x & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) $X = X(x)$ に関する次の固有値問題について，固有値およびそれに対応する固有関数を求めよ．ただし，$\lambda$ は実数とする．

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X = 0 & (0 < x < \pi) \\ \dfrac{dX}{dx}(0) = \dfrac{dX}{dx}(\pi) = 0 & \end{cases}$$

(2) 次の初期値・境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (0 < x < \pi,\ 0 < t) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,\ t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(\pi,\ t) = 0 & (0 < t) \\ v(x,\ 0) = \cos 3x & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

(3) 初期値・境界値問題 $(*)$ の解を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ パラメータ $(u, v)$ $(-\pi \leq u \leq \pi,\ -1 \leq v \leq 1)$ により表される曲面

$$\begin{cases} x = 2\cos u - v\cos u \sin u \\ y = 2\sin u - v\sin^2 u \\ z = v\cos u \end{cases}$$

について，次の問に答えよ．

(1) $(u, v) = (u, 0)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(2) $(u, v) = (u, 0)$ におけるガウス曲率 $K$ と平均曲率 $H$ を求めよ．

**9** 以下の問に答えよ．ただし，$P(A)$ は事象 $A$ の確率を表す．

(1) $X$ を確率密度が正の定数 $C, \lambda$ に対して $f(x) = Ce^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ で与えられる連続型確率変数とする．

(i) $C$ を $\lambda$ で表せ．

(ii) $X$ の平均を求めよ．

(iii) 正の数 $s, t$ に対して $P(X \geqq s + t | X \geqq s) = P(X \geqq t)$ が成り立つことを示せ．ただし，左辺は条件 $X \geqq s$ のもとでの事象 $X \geqq s + t$ の条件付き確率である．

(2) 正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数 $X$ に対して，

$$P(X \geqq 62) = 0.3085, \qquad P(X \leqq 41) = 0.1056$$

が成り立つとする．標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 $T$ に対して

$$P(T \geqq 0.5) = 0.3085, \qquad P(T \leqq -1.25) = 0.1056$$

であることを利用して，$X$ の平均，分散，標準偏差を求めよ．