2020年度　実力テスト
専門問題（数理サイエンスコース）

2021 年 1 月 21 日（木）
14 : 00 〜 16 : 00 (120 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 9 題ある．そのうち 4 題 を選択して答えよ．
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し，選択した問題番号を所定の欄に明記すること．問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない．
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し，解答用紙はすべて提出すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 試験開始から 30 分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} - \left(6 - \frac{1}{t}\right)x = \frac{3}{t}$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + \left(6 - \frac{1}{t}\right)y = -\frac{3}{t}\,y^2$$

の一般解を求めよ．ただし，(1) の結果を用いてもよい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{Z}/14\,\mathbb{Z}$ の既約類 (乗法の可逆元) をすべて挙げよ．また，各既約類について位数を求めよ．

(2) $G = GL(2, \mathbb{R})$ とする．

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in G$ の中心化群を求めよ．ここで，$x \in G$ の中心化群とは，G の部分群であって x と可換な $g \in G$ 全体のなすものをいう．

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ の中心化群を求めよ．

(c) G の中心を求めよ．ここで，群 G の中心とは，G の部分群であって任意の $x \in G$ と可換な $g \in G$ 全体のなすものをいう．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) べき級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n + n}}{2^{n+1}} x^n$ を考える．

(1-a) このべき級数の収束半径を求めよ．

(1-b) 微分係数 $f^{(3)}(0)$ を求めよ．ただし $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．

(2) α を実数の定数とする．平面の第 1 象限 $D = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ に対して広義積分

$$I = \iint_D \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}\, dxdy$$

が収束するための α の条件を求めよ．また α がその条件を満たすとき，積分値 I を計算せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問に答えよ．

(1) X, Y を空でない集合，$f : X \to Y$ を写像とする．このとき，f が単射ならば，X の任意の部分集合 A, B に対して次が成り立つことを示せ．

$$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$$

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A := \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ の内部 A° と閉包 $\overline{A}$ を求めよ．ただし $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする．

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A, B がともにコンパクトならば，$A \cup B$ もコンパクトであることを示せ．

5 R を 1 より大きな正の実数とし，複素平面上の曲線 C_1, C_2, C_3, C をそれぞれ以下で定義する．

(i) 原点 0 を始点とし，R を終点とする線分を C_1 とする．

(ii) 原点を中心とする半径 R の円に沿って，R を始点とし $Re^{2\pi i/5}$ を終点とする円弧を C_2 とする．

(iii) $Re^{2\pi i/5}$ を始点とし，0 を終点とする線分を C_3 とする．

(iv) $C = C_1 + C_2 + C_3$ とする．

$f(z) = \dfrac{1}{z^5 + 1}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} f(z)\,dz = 0$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^5+1}\,dx$ の値を求めよ．

6 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$\{f_n\}$ を $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の $\mathbb{R}$ 値可測関数列とする．このとき，次の (1), (2) はそれぞれ成り立つか．常に成り立つ場合は証明し，必ずしも成り立たない場合は反例を挙げよ．

(1) $\{f_n\}$ が X 上である可積分関数 f に各点収束し，かつ $\displaystyle\sup_{n\geq 1}\int_X |f_n|\,d\mu < \infty$ を満たすならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

(2) ある可積分関数 $g \geq 0$ が存在して，任意の $n \geq 1$ に対して X 上で $f_n \leq g$ が成り立つならば，

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

7 熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \ \ (t>0,\ x\in\mathbb{R}) \qquad (*)$$

の解 $u(t,x)$ に対して，$u_\lambda(t,x) = \lambda\, u(\lambda^2 t, \lambda x)$ と定める．ただし，λ は正の定数である．以下の問に答えよ．

(1) $u_\lambda(t,x)$ は $(*)$ の解となることを示せ．

(2) ϕ を $\mathbb{R}$ 上で定義された C^∞ 級関数とし，$u(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\phi\!\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$ と表される $(*)$ の解を考える．任意の正の定数 λ に対して，$u(t,x) = u_\lambda(t,x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$ とおく．$\phi = \phi(\xi)$ が満たす微分方程式を ϕ と ξ を用いて表せ．

(4) $\phi = \phi(\xi)$ が $\phi(0) = 1,\ \dfrac{d\phi}{d\xi}(0) = 0$ を満たすとき，(2) で考えた $(*)$ の解 $u(t,x)$ を求めよ．

8 曲面

$$\begin{cases} x &= 2\cos u\cos v \\ y &= \cos u\sin v \\ z &= 2\sin u \end{cases}$$

$(0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le\pi)$ と，この曲面上の点 $\mathrm{A} = \left(1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ について，次の問いに答えよ．

(1) A を表すパラメーター (u,v) を求めよ．

(2) A における法線ベクトルを 1 つあげよ．

(3) A における接平面の方程式を求めよ．

(4) A におけるガウス曲率を求めよ．

9 ド・モワブル-ラプラスの定理 (中心極限定理) を用いて，次の問に答えよ．ただし，標準正規分布に従う確率変数 T に対して，$|T| \geqq 1.96$ の確率 $P(|T| \geqq 1.96)$ がほぼ 0.05 であること，$|T| \geqq 2.58$ の確率 $P(|T| \geqq 2.58)$ がほぼ 0.01 であることを用いてよい．

(1) あるテレビ番組の視聴率を 400 人を対象に行ったところ 20% であった．母集団全体での視聴率に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．

(2) あるサイコロを 125 回振ったところ 6 が 32 回出た．このサイコロは 6 が出やすいと言ってよいか．検定すべき帰無仮説を述べて，危険率 5% で検定せよ．